Введение

Полезность нелинейных преобразований последовательностей для улучшения и даже индуцирования сходимости была достаточно продемонстрирована Шенксом [2]. Однако эвристическая основа преобразований Шенкса имеет некоторые недостатки. Путём соответствующей модификации, предложенной Левиным, генерируются преобразования, которые дают значительное улучшение по сравнению с преобразованиями Шенкса. Дополнительным преимуществом является то, что преобразования выражены в простой замкнутой форме без необходимости вычисления высокопорядковых детерминант, как это происходит в некоторых преобразованиях Шенкса.

От Шенкса к Левину

Для последующего упоминания резюмируем подход Шенкса и преобразования, которые он получает [2]. Шенкс начинает с последовательности частичных сумм ряда

и, сравнивая её с представлением как функции от вида

он может вычислить её спектр амплитуд (англ. spectrum of amplitudes) , её отношения (англ. ratios) и её базу (англ. base) .

*Определение 1*: спектр амплитуд , отношения и её база определяются как параметры, характеризующие поведение последовательности в представлении (1). Спектр амплитуд описывает веса различных экспоненциальных компонент, отношения задают скорости изменения этих компонент, а база при удовлетворении { уравнению (1) и удовлетворении каждого отношения представляет собой предел последовательности при :

Иными словами, а представлении (1) приближением моделируется поведение членов последовательности {, а не её сумма.

*Определение 2*: если { удовлетворяет уравнению (1) и одно или более , не сходится, тогда Шенкс утверждает [1], что « расходится от », и называется антипределом {. Теоретическая значимость антипредела заключается в возможности применять методы суммирования к расходящимся рядам, что особенно востребованно при работе с асимптотическими разложениями в теоретической физике и прикладном анализе [2, 3]. Однако точная модель (1) слишком идеализирована. Большинство реальных последовательностей не описываются ей точно. Для них используется обобщение – метод локальной аппроксимации. В данном методе требование выполнение модели (1) ослабляется: оно должно выполняться не для всех , а только на конечном интервале индексов от до . Это приводит к системе уравнений:

где – искомая оценка предела (база), – амплитуды -й экспоненциальной компоненты на интервале вокруг , – отношения -й экспоненциальной компоненты на интервале вокруг .Алгебраическое решение этой системы для неизвестной может быть представлено в компактной форме с помощью определителей (см. (3)). Получаемая величина рассматривается как аппроксимация предела (или антипредела) последовательности {.

*Определение 3*: для последовательности { локальной базой -го порядка называется решение системы уравнений (2) относительно параметра .

Алгебраически получаем для формулу

где

Тогда преобразование Шенкса [1] определяется как

а диагональное или преобразование Шенкса как

Обозначим

Таким образом,

если определим

Таким образом, идентифицируем члены последовательности { с частичными суммами бесконечного ряда . Тогда можем легко проверить, что (3) для также получается, если решим для систему уравнений

где имеется только уравнений для величин и с .

Идея Шенкса заключается в том, чтобы рассматривать как функцию [2], вычисленную для целых значений , и аппроксимировать эту функцию как сумму степеней с произвольными коэффициентами, как в (1), и, таким образом, получать информацию о поведении последовательности при из конечного числа членов последовательности. В соответствии с (4), видим, что также можем рассматривать эту аппроксимацию функции как аппроксимацию с помощью линейной комбинации функций (как функций от ) для с произвольными коэффициентами и включая константный член . Шенкс показывает в своей статье [2], что если являются частичными суммами степенного ряда разложения рациональной функции от , то преобразование работает наиболее эффективным образом, так что при достаточно больших и является точно этой рациональной функцией во всей -плоскости. Однако функции настолько схожи между собой, что использование линейной комбинации таких, практически, идентичных функций для аппроксимации , как это реализовано в (4), представляется неэффективным. Кроме того, аппроксимация с помощью линейной комбинации степеней может быть не подходящей для последовательностей, скорость сходимости или расходимости которых меньше скорости, с которой стремится к нулю или к бесконечности соответственно. В качестве примеров можно упомянуть последовательности и .

Алгоритм Левина

Алгоритм Левина [1] относится к классу нелинейных методов ускорения сходимости и основывается на построении преобразований, полученных в результате аппроксимации с помощью функций от , отличных от используемых Шенксом. Алгоритм имеет несколько вариаций. Рассмотрим каждую из них.

*-преобразование*.

-преобразование вводится для знакочередующихся рядов и последовательностей с экспоненциально убывающими членами [1], то есть случаев, когда -преобразование Шенкса оказывается недостаточно эффективным.

По аналогии с (4) записываем уравнений для последовательности [1]:

где – функции от , включающие произвольных констант, и стремимся решить систему (5) для полагая, что должно быть аппроксимацией предела последовательности . Если последовательность расходится, но одномерная последовательность {, которую можем сформировать из, стремится к пределу , то будем называть антипределом относительно соответствующего преобразования. В случае получаем два уравнения

и хотим выбрать такое, чтобы

то есть, чтобы

Предположим, что каким-то образом нашли функцию . Тогда очевидно, что желательно улучшить эту аппроксимацию, поэтому для определяем

где – константы, которые должны быть определены из (5), в то время как – функции от , которые выберем на основе удобства и взаимной независимости. Уравнения (5) теперь принимают форму:

Для удобства обозначим , и получаем с помощью правила Крамера [1]:

Детерминанты в не удобны для вычислений в общем случае, но для частного случая

и при условии, что для любого *n*, можем легко выразить их через детерминанты Вандермонда, деля последовательные столбцы на соответственно и разлагая по первой строке. Это элементарное вычисление даёт результат

Теперь нужно подходящее выражение для , которое обладает свойством, выраженным в (6). По аналогии с (4) теперь записываем уравнений для последовательности . Стоит учитывать, что, следуя Шенксу, нумерация членов последовательности начинается с , однако дальше в некоторых случаях будет удобнее начинать с как с первого члена последовательности.

Известные преобразования, такие как , часто значительно улучшают сходимость последовательностей, сформированных из частичных сумм знакочередующихся рядов [1]:

Соответственно, сначала рассмотрим оценку для для таких последовательностей. Если предполагаем, что является достаточно гладкой функцией от , и что

(когда последовательность расходится, – антипредел), то очевидно, что

и более точно

В соответствии с (7) видим, что достаточно выбрать с точностью до константного множителя, и поэтому берём

Кроме того, является хорошей аппроксимацией для последовательности, которая расходится очень быстро, так как тогда имеет порядок величины , и если имеет антипредел относительно разрабатываемого преобразования, то для больших

что именно то, что требуется от (см. (6)). Соответственно, принимая , можем ожидать получения из (9) хороших аппроксимаций к пределу или антипределу последовательности, сгенерированной частичными суммами знакочередующегося ряда, и к антипределу очень быстро сходящегося ряда. При условии, что для всех , подставляем в (9) и получаем

Видим из (11), что является взвешенным средним последовательности и использует , а сами веса зависят от . Таким образом, преобразование, заданное двумерной таблицей , является нелинейным. Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

**Вход**:– исходный ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

**if or or len:**

**return** «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

**#** Строим частичные суммы (аналогично (10))

**len**

**for** **in** **rangelen**:

, = ,

**for** **in** **range**:

**if** :

**return** «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

**#** Весовой коэффициент получаем по формуле (11)

+= \* # в числителе вес умножается на (11)

+=

**if** :

**return** «Ошибка: знаменатель = 0»

**return #** результат

*Рисунок 2*. Пример применения -преобразования.

**Вход**: = , ,

**Выход**: = 0.7854

*Рисунок 2*. Пример применения -преобразования.

Теперь определим -преобразование аналогично преобразованию Шенкса [0, p. 7]:

В отличие от преобразования Шенкса , подход Левина является гибким – он позволяет достичь двух целей: создать универсальный алгоритм, где конкретный метод задаётся выбором оценки остатка, а не выводится заново для каждого случая, и расширить класс решаемых задач, получая преобразования (такие как - и -), эффективные для последовательностей, где метод Шенкса малоэффективен. Также определим преобразование [1]:

Это определение не соответствует диагональному преобразованию Шенкса. И , и используют ровно первые элементов последовательности . Например, для вычисления требуются , и для необходимы те же элементы. Различие заключается в том, что в преобразовании Шенкса результат не зависит от нумерации элементов. Если определить новую последовательность со сдвигом индексов: , то преобразование для будет эквивалентно исходному, то есть . В преобразовании Левина результат зависит от нумерации. Например, требует, чтобы элементы были проиндексированы строго с .

Свойства - и -преобразований.

Преобразования ,, или в общем, любое преобразование , которое можно сформировать из (11), не являются линейными, но, как и с преобразованиями Шенкса, есть два простых, но важных свойства [1]:

где используется для обозначения последовательности

содержащей каждый член, равный одной и той же константе . Доказательство этого элементарно.

Преобразования , не являются регулярными, то есть существуют сходящиеся последовательности, для которых и приводят к последовательностям, которые расходятся или имеют другой предел, но если является последовательностью частичных сумм сходящегося ряда, то и сходятся к пределу . Это можно показать, записав преобразование , например, в форме метода суммирования [1] , где . Тогда для фиксированного знакочередующегося ряда применение теоремы Сильвермана-Тёплица [4] позволяет установить регулярность метода суммирования . В частности, в работе [5] приведено доказательство того, что данный метод суммирует к его пределу при выполнении условий теоремы.

Покажем, в какой степени улучшение сходимости – общее правило. Укажем улучшение, достигнутое , при применении к определённому классу знакочередующихся рядов. В первую очередь, можем отметить из выражений для и, что . Кроме того, для Шенкс доказал следующий результат [1].

*Определение 4*: пусть для последовательности , сходящейся к пределу , исходная погрешность убывает как:

а после применения преобразования погрешность становится:

тогда мерой улучшения сходимости называется отношение .

Шенкс показал [1], что если – полиномы степеней , соответственно, и не обращается в ноль при целых , то для последовательности

погрешность преобразования убывает как:

Это даёт меру улучшения сходимости, достигнутого , при применении к последовательности (14). Аналогичный подход применяется для -преобразования. Предположим теперь, что является последовательностью

когда и имеет разложение вида

и для – положительного целого числа. Из вычислений, аналогичных проведённым Шенксом [1], следует:

Легко показать, что, если сходится, сходится к тому же пределу, и (15) показывает улучшение, достигнутое в скорости сходимости.

-преобразование

-преобразование предназначено для медленно сходящихся монотонных рядов [1], таких как:

где методы и неэффективны. Связано это с тем, что их алгоритмы предполагают убывание остатка со скоростью, превышающей степенную, что не выполняется для последовательностей вида

Для таких рядов погрешности преобразований и убывают с той же скоростью, что и исходная последовательность [1]:

где .Однако простым изменением можно получить преобразование, значительно улучшающее сходимость для таких медленно сходящихся монотонных рядов. Рассмотрим ряд .Когда имеет асимптотическое разложение

так что ряд сходится. Пробуем получить выражение для , которое подходит для такого рода. Запишем

и тогда в соответствии с (6) нужно

Можем легко оценить этот остаток, рассматривая выражение (16) для как функцию от , определённую для всех положительных действительных , и сравнивая с интегралом Таким образом, находим

и так как достаточно определить с точностью до константного множителя, то целесообразно взять

Подставляем это в (9) и получаем величину , заданную

Из приведённых выкладок следует, что погрешность преобразования оценивается как

Стоит отметить, что это уравнение для очень похоже на (11) для и может быть получено из (7), взяв как прежде, но выбрав вместо как в (8). Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

**Вход**:– исходный ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

**if or or len:**

**return** «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

**#** Строим частичные суммы (аналогично (10))

**len**

**for** **in** **rangelen**:

, = ,

**for** **in** **range**:

**if** :

**return** «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

**#** Весовой коэффициент получаем по формуле (20)

+= \* # в числителе вес умножается на (20)

+=

**if** :

**return** «Ошибка: знаменатель = 0»

**return #** результат

*Рисунок 3*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: = , ,

**Выход**: = 1.5239

*Рисунок 4*. Пример применения-преобразования.

Так же, как с помощью определили -преобразования, теперь определяем *u*-преобразования с помощью . В особенности, определяем [1]

Как для -преобразований, наблюдаем, что -преобразования удовлетворяют условиям (12) и (13), и можем показать, что последовательности частичных сумм, сходящихся знакочередующихся рядов преобразуются в последовательности, сходящиеся к тому же пределу, и кажется, что для таких последовательностей и оказывают примерно одинаковую степень улучшения скорости сходимости. Однако для медленно сходящихся монотонных последовательностей -преобразования более эффективны. Связано это с тем, что в них весовой множитель усиливает вклад остаточного члена ​, благодаря чему погрешность снижается до порядка .

-преобразования*.*

-преобразование используется как универсальный метод, объединяющий свойства - и -преобразований [1]. Оно применяется в случаях, когда характер убывания остатка заранее неизвестен, а также для смешанных типов последовательностей, где одновременно проявляются осцилляции и медленное убывание.

Начнём с преобразования , применённого к любой последовательности [1]:

Предполагая, что является аппроксимацией предела или антипредела , можем использовать (6), чтобы получить выражение для :

Подстановка этого значения для в (9) даёт

Псевдокод для -преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

**Вход**:– исходный ряд, представленный в виде , параметр - порядок преобразования, индекс элемента

**Выход**: ускоренная последовательность , полученная путём применения -преобразования

**if or or len:**

**return** «Ошибка: некорректные параметры или не хватает членов ряда»

**#** Строим частичные суммы (аналогично (10))

**len**

**for** **in** **rangelen**:

, = ,

**for** **in** **range**:

**if** **or** :

**return** «Ошибка: деление на ноль в весовом коэффициенте»

**#** Весовой коэффициент получаем по формуле (21)

+= \* # в числителе вес умножается на (21)

+=

**if** :

**return** «Ошибка: знаменатель = 0»

**return #** результат

*Рисунок 5*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: = ,

**Выход**: = 0.6806

*Рисунок 6*. Пример применения-преобразования.

Используя , определяем -преобразования [1]

Замечание [1]: в (55) коэффициенты являются оптимальными для исходной последовательности , точно отражая поведение остаточного члена . Рекурсивное применение (55) пересчитывает эти коэффициенты на основе вновь полученной последовательности , вследствие чего они уже не соответствуют первоначальной структуре остаточного члена, и дополнительное ускорение исчезает, а накопленные численные ошибки способны ухудшить сходимость.

Также -преобразования обладают свойствами (12) и (13) [1]. Они являются регулярными: для любой последовательности частичных сумм знакочередующегося ряда последовательность результатов -преобразования сходится к той же сумме. Ключевое преимущество -преобразования заключается в его универсальности: оно демонстрирует эффективность, сопоставимую с -преобразованием для знакочередующихся рядов и с -преобразованием для медленно сходящихся монотонных рядов, что позволяет применять его в ситуациях, когда характер сходимости исходного ряда заранее неизвестен.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к вычислению бесконечных интегралов от осциллирующих функций путём интегрирования между нулями функции, а затем преобразования полученного знакочередующегося ряда. Также, как другое применение, можно упомянуть улучшение простой численной интеграции.

Во многих случаях последовательность будет монотонной, и тогда обычные методы для ускорения сходимости не так эффективны. Но тогда - или -преобразование должно быть подходящим.

Преобразования -, -, - могут быть использованы для генерации рациональных аппроксимаций функций , имеющих формальные разложения в степенные ряды. При определённых условиях эти аппроксимации превосходят сопоставимые члены таблицы Паде функции .

Список литературы

[0] Проект старшекурсников (при объединении файлов убрать)

[1] Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Levin D. A. - 1972. – P. 371-388.

[2] Non-Linear Transformations of Divergent and Slowly Convergent Sequences // Shanks D. C. – 1955. – P. 1-42.

[3] A continuous Euler transformation and its application to the Fourier transform of a slowly decaying function // Ooura T. – 2001. – P. 259-270.

[4] Divergent Series // Hardy G. H. – 1949. – P. 43-48.

[5] Theory and Application of Infinite Series // Knopp. K. – 1990. – P. 451-460.